РОЗДІЛ 2. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ

Поверхнею другого порядку називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)$ – многочлен другого степеня.

Усі поверхні другого порядку можна утворити рухом прямої або рухом лінії другого порядку. Найпростіші форми руху є обертання і паралельне перенесення. Більшість поверхонь другого порядку можна дістати обертанням лінії другого порядку навколо осі і рівномірним стисненням або розтягненням добутої поверхні обертання в певному напрямі.

Означимо та проілюструємо усі невироджені поверхні другого порядку й запишемо їх канонічні рівняння.

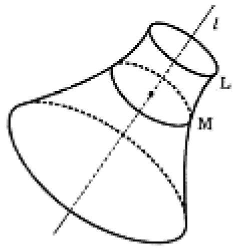
<table>
<tr><th colspan="2">I. Поверхні обертання</th></tr>
<tr><td>

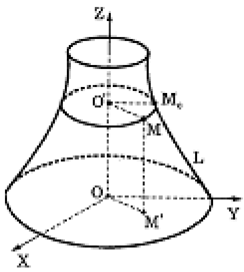
Рис. 2.1</td><td>

Рис. 2.2</td></tr>
<tr><td>Поверхня, яка утворюється внаслідок обертання кривої L навколо прямої l, називається поверхнею обертання (див. рис. 2.1). При цьому пряма l називається віссю обертання, а крива L – твірною поверхні обертання.</td><td>Якщо крива L у системі координат Oyz задається рівнянням $F(y;z)=0$ і вісь обертання поверхні l збіглася з віссю Oz, то рівняння поверхні обертання (див. рис. 2.2) запишеться так: $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2};z\right)=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило складання рівняння поверхні обертання: необхідно в рівнянні лінії, яка обертається, залишити без змін ту змінну, яка відповідає осі обертання, а другу змінну замінити на корінь квадратний, взятий зі знаками «+» та «–», з суми квадратів цієї ж змінної і тієї змінної, яка відсутня в рівнянні кривої.</td></tr>
</table>

Приклади утворення поверхонь обертання			
Назва поверхні	**Вісь l**	**Твірна лінія L**	**Рівняння поверхні**
Сфера	Ox	коло $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$	$x^2+y^2+z^2=R^2$
Еліпсоїд обертання	Oy	еліпс $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$	$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Однопорожнинний гіперболоїд обертання	Oz	гіпербола $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$	$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Двопорожнинний гіперболоїд обертання	Ox	гіпербола $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$
Параболоїд обертання	Oz	парабола $\begin{cases} x^2=2pz \\ y=0 \end{cases}$	$x^2+y^2=2pz$

II. Сфера

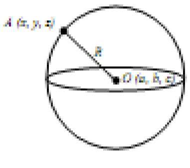


Рис. 2.3

Сферою (див. рис. 2.3) називається геометричне місце точок, відстань яких від заданої точки простору (центр сфери) є величина стала (радіус сфери).

Сферу можна задати чотирма точками, які не лежать на одній площині.

III. Еліпсоїд

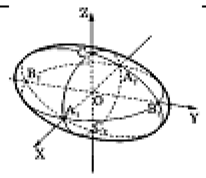


Рис. 2.4

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.4): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення еліпсоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.

IV. Однопорожнинний гіперболоїд

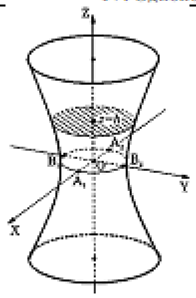


Рис. 2.5

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.5):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення однопорожнинного гіперболоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.

Інші канонічні рівняння однопорожнинних гіперболоїдів:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

V. Двопорожнинний гіперболоїд

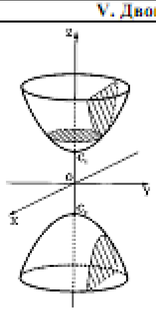


Рис. 2.6

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.6):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення двопорожнинного гіперболоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.

Інші канонічні рівняння двопорожнинних гіперболоїдів:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

VI. Еліптичний параболоїд

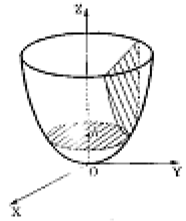


Рис. 2.7

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.7):

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$$

Поверхня утворена внаслідок рівномірного стиснення параболоїда обертання до однієї з його площин симетрії або шляхом розтягнення в протилежних напрямах.

Інші канонічні рівняння еліптичних параболоїдів:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y,\quad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$$

VII. Гіперболічний параболоїд

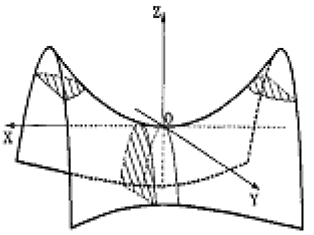


Рис. 2.8

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням (див. рис. 2.8):

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

Поверхня описана параболою, яка рухається в просторі так, що її площина залишається весь час паралельною заданій площині (Oyz), а вершина ковзає по нерухомій параболі, розміщеній в перпендикулярній площині (Oxz). Напрями осей обох парабол (рухомої і нерухомої) протилежні.

Інші канонічні рівняння гіперболічних параболоїдів:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y,\quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x,$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2z,\quad \frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=-2y,\quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=-2x$$

Еліптичний параболоїд теж можна утворити рухом параболи, площина якої, переміщаючись, залишається весь час паралельною заданій площині, а вершина ковзає по нерухомій параболі, розміщеній в площині, перпендикулярній до неї. Але напрями осей обох парабол (рухомої і нерухомої) повинні мати однакові напрями.

VIII. Циліндрична поверхня

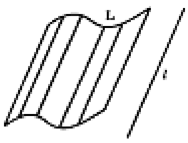


Рис. 2.9

Поверхня, утворена внаслідок руху прямої (твірної), яка перетинає задану криву (напрямну) L і залишається паралельною даній прямій l, називається ***циліндричною поверхнею*** (див. рис. 2.9).

Кожне рівняння другого порядку з двома змінними x, y в просторі, якщо воно виражає дійсну поверхню і не розкладається на два лінійні множники, є рівняння циліндра, твірні якого паралельні осі Oz.

Коли б рівняння поверхні в просторі мало дві змінні x, z, то воно виражало б циліндр з твірними, паралельними осі Oy, а коли б воно містило змінні y, z, то твірні циліндра були б паралельні осі Ox.

Приклади циліндрів та їх канонічних рівнянь

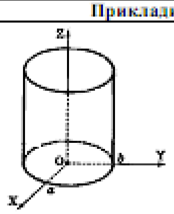


Рис. 2.10. Еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

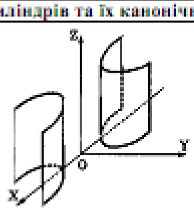


Рис. 2.11. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

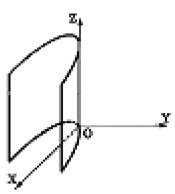


Рис. 2.12. Параболічний циліндр $y^2=2px$

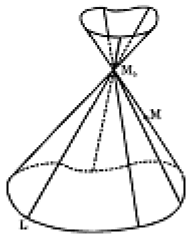
<table>
<tr><th colspan="2">IX. Конічна поверхня</th></tr>
<tr><td>

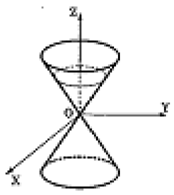
Рис. 2.13</td><td>

Рис. 2.14</td></tr>
<tr><td>Поверхня, утворена внаслідок руху прямої (твірної), яка проходить через дану точку M_0 (вершину) і перетинає дану криву L (напрямну), називається конічною поверхнею (див. рис. 2.13).</td><td>Однорідне рівняння другого порядку з трьома змінними, якщо воно виражає дійсну поверхню в просторі і не розкладається на лінійні множники, є рівняння конуса з вершиною в початку координат, наприклад: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (див. рис. 2.14).</td></tr>
</table>

Інші важливі характеристик поверхонь другого порядку.

Довільна пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках. Перетином поверхні другого порядку з довільною площиною є лінія другого порядку або пряма.

Поверхні другого порядку, які мають дійсні прямолінійні твірні, називають ***лінійчастими***. Їх можна утворити рухом прямої. До таких поверхонь належать циліндричні й конічні поверхні, однопорожнинний гіперболоїд та гіперболічний параболоїд.

Дотичною площиною в точці до поверхні другого порядку називається геометричне місце дотичних до всіх ліній, які лежать на поверхні і проходять через цю точку (точку дотику). Опукла поверхня другого порядку (наприклад, еліпсоїд) з дотичною площиною мають одну спільну точку. Лінійчасті поверхні з дотичною площиною мають або спільну пряму дотику (наприклад, циліндр, конус), або дві спільні прямі (прямолінійні твірні) (наприклад, однопорожнинний гіперболоїд та гіперболічний параболоїд).

Для поверхні другого порядку $F(x,y,z)=0$ і точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$, яка належить цій поверхні, рівняння дотичної площини в точці $P_0(x_0,y_0,z_0)$ матиме вигляд: $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$.

Центром поверхні другого порядку називається точка, в якій усі хорди поверхні, що через неї проходять, діляться навпіл. Тому розрізняють такі типи невироджених поверхонь другого порядку: 1) центральні (еліпсоїд, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди, конус); 2) нецентральні (еліптичний і гіперболічний параболоїди); 3) поверхні з прямою центрів (еліптичний і гіперболічний циліндри) тощо.

Щоб знайти центр поверхні другого порядку, необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)=0 \\ F'_y(x,y,z)=0. \\ F'_z(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Відрізок, який сполучає дві довільні точки поверхні другого порядку, називається ***хордою*** цієї поверхні. Середини паралельних хорд поверхні другого порядку лежать на площині. Площина, яка проходить через середини хорд поверхні другого порядку, паралельних до деякого вектора $\vec{l}(a,b,c)$, називається ***діаметральною площиною*** цієї поверхні, спряженою з вектором $\vec{l}$. Рівняння діаметральної площини, спряженої з вектором $\vec{l}$ має вигляд:

$$F'_x(x,y,z)\cdot a+F'_y(x,y,z)\cdot b+F'_z(x,y,z)\cdot c=0.$$

2.2. БАЗОВІ ЗАДАЧІ ТА СИСТЕМА ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

РІВЕНЬ А

Завдання 2.1. *Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо заданої осі такої лінії (див. таблиця 2.1):*

Таблиця 2.1

№	*Вісь обертання*	*Задана лінія*
2.1.1.	Oy	$x^2-3y^2=2,\ \ z=0$
2.1.2.	Oz	$5x+z-4=0,\ \ y=0$
2.1.3.	Ox	$3x^2+y-5=0,\ \ z=0$
2.1.4.	Oy	$yz-z^2-4=0,\ \ x=0$
2.1.5.	Oz	$x^2+5z^2-7=0,\ \ y=0$
2.1.6.	Ox	$5x^2+y^2=2x,\ \ z=0$
2.1.7.	Oy	$\frac{1}{2}x^2-7y^2+12y-9=0,\ \ z=0$
2.1.8.	Oz	$4y+yz-z^2+2=0,\ \ x=0$

2.1.9.	Ox	$2z^2 - 12x + 9z = 0,\ \ y = 0$
2.1.10.	Oy	$y - z - 5 = 0,\ \ x = 0$
2.1.11.	Oz	$3y^2 + 2z^2 - 7y = 0,\ \ x = 0$
2.1.12.	Ox	$2x^2 - z^2 + 5x = 0,\ \ y = 0$
2.1.13.	Oy	$\frac{3}{2}x^2 + 5y - 12 = 0,\ \ z = 0$
2.1.14.	Oz	$z^2 + 3yz + 14 = 0,\ \ x = 0$
2.1.15.	Ox	$4x - 7y + 11 = 0,\ \ z = 0$
2.1.16.	Oy	$z^2 + 5y^2 + 5z - 13 = 0,\ \ x = 0$
2.1.17.	Oz	$3x^2 - \frac{7}{13}z^2 - 9 = 0,\ \ y = 0$
2.1.18.	Ox	$y + 6xy + x^2 - 1 = 0,\ \ z = 0$
2.1.19.	Oy	$3x^2 + y - 5 = 0,\ \ z = 0$
2.1.20.	Oz	$\frac{5}{11}z - 3y + 17 = 0,\ \ x = 0$
2.1.21.	Ox	$6x^2 + 5z^2 - 7z + x = 0,\ \ y = 0$
2.1.22.	Oy	$3x^2 - 4y^2 + 4y - 3 = 0,\ \ z = 0$
2.1.23.	Oz	$y - z - 5 = 0,\ \ x = 0$
2.1.24.	Ox	$x^2 - 3x + 4y - 4 = 0,\ \ z = 0$
2.1.25.	Oy	$3y^2 + z^2 + z + y = 0,\ \ x = 0$
2.1.26.	Oz	$4x^2 - z^2 + z - 7 = 0,\ \ y = 0$
2.1.27.	Ox	$5x + z - 4 = 0,\ \ y = 0$
2.1.28.	Oy	$5x^2 - 9y + 4x - 7 = 0,\ \ z = 0$
2.1.29.	Oz	$8x^2 + 7z^2 + 15z - x = 0,\ \ y = 0$
2.1.30.	Ox	$\frac{1}{5}y^2 - 3y + 5x^2 - 1 = 0,\ \ z = 0$
2.1.31.	Oy	$-2y + \frac{1}{3}z - 24 = 0,\ \ x = 0$
2.1.32.	Oz	$2y^2 - 3z^2 + 6 = 0,\ \ x = 0$

Покажемо розв'язання завдання 2.1 для осі Oz і лінії $\begin{cases}(x-4)^2 + z^2 = 1\\ y = 0\end{cases}$.

Розв'язання.

Щоб отримати рівняння шуканої поверхні обертання скористаємось правилом: необхідно в рівнянні лінії, яка обертається, залишити без змін ту змінну, яка відповідає осі обертання, а другу змінну замінити на корінь квадратний, взятий зі знаками «+» та «–», з суми квадратів цієї ж змінної і тієї змінної, яка відсутня в рівнянні кривої. Тобто, якщо віссю обертання є Oz, то змінну z залишаємо без змін, а замість x в рівняння твірної лінії (кола) підставимо $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Відповідно, отримуємо $\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - 4\right)^2 + z^2 = 1$. Далі розкриємо дужки, піднісши до квадрату: $x^2 + y^2 + 16 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 = 1$.

Остаточно звільнившись від ірраціональності, маємо рівняння поверхні обертання (до речі, це тор): $\left(x^2+y^2+z^2+15\right)^2=64\left(x^2+y^2\right)$.

Відповідь: $\left(x^2+y^2+z^2+15\right)^2=64\left(x^2+y^2\right)$.

Завдання 2.2. *Знайти центр і радіус поданого кола, утвореного при перетині сфери площиною (див. таблиця 2.2):*

Таблиця 2.2

№	*Рівняння кола*	№	*Рівняння кола*
2.2.1.	$\begin{cases}2x-y+2z-9=0\\(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=64\end{cases}$	2.2.17.	$\begin{cases}4x+2y-z-3=0\\(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=64\end{cases}$
2.2.2.	$\begin{cases}3x+2y+z-4=0\\(x-1)^2+(y+7)^2+(z+1)^2=25\end{cases}$	2.2.18.	$\begin{cases}x-4y+3z-1=0\\(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=81\end{cases}$
2.2.3.	$\begin{cases}x-5y+3z=0\\x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36\end{cases}$	2.2.19.	$\begin{cases}4x-y+z-7=0\\x^2+(y+6)^2+(z-1)^2=64\end{cases}$
2.2.4.	$\begin{cases}4x+y-z+1=0\\(x+4)^2+y^2+(z-2)^2=49\end{cases}$	2.2.20.	$\begin{cases}2x+y-3z-7=0\\(x-4)^2+y^2+(z+1)^2=100\end{cases}$
2.2.5.	$\begin{cases}x-y+z-2=0\\(x+1)^2+(y-5)^2+z^2=64\end{cases}$	2.2.21.	$\begin{cases}5x-2y+z+7=0\\(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=81\end{cases}$
2.2.6.	$\begin{cases}x-2y+3z-4=0\\(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25\end{cases}$	2.2.22.	$\begin{cases}x+y+z-1=0\\(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=25\end{cases}$
2.2.7.	$\begin{cases}2x-y+3z+2=0\\x^2+(y-2)^2+(z+3)^2=36\end{cases}$	2.2.23.	$\begin{cases}5x-2y+z=0\\x^2+(y-4)^2+(z+2)^2=36\end{cases}$
2.2.8.	$\begin{cases}2x-3y+4z+1=0\\(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=81\end{cases}$	2.2.24.	$\begin{cases}x+y-2z+3=0\\(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=64\end{cases}$
2.2.9.	$\begin{cases}x-y+z-2=0\\(x+1)^2+(y-5)^2+z^2=100\end{cases}$	2.2.25.	$\begin{cases}x+6y-z=0\\(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=100\end{cases}$
2.2.10.	$\begin{cases}-x+4y+z-5=0\\(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=36\end{cases}$	2.2.26.	$\begin{cases}2x-2y+z=0\\(x-4)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=64\end{cases}$
2.2.11.	$\begin{cases}-2x+3y+2z-12=0\\x^2+(y-3)^2+(z+3)^2=100\end{cases}$	2.2.27.	$\begin{cases}3x-4y+z-6=0\\x^2+(y-1)^2+(z+4)^2=25\end{cases}$
2.2.12.	$\begin{cases}x+y-4z+2=0\\(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=64\end{cases}$	2.2.28.	$\begin{cases}3x+y-4z+2=0\\(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=81\end{cases}$
2.2.13.	$\begin{cases}x+3y-3z+1=0\\(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=144\end{cases}$	2.2.29.	$\begin{cases}3x-2y+z+10=0\\(x-4)^2+(y+1)^2+z^2=64\end{cases}$
2.2.14.	$\begin{cases}2x-2y+z-7=0\\(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=225\end{cases}$	2.2.30.	$\begin{cases}x-y+z=0\\(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25\end{cases}$
2.2.15.	$\begin{cases}x-3y+5z-2=0\\x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=36\end{cases}$	2.2.31.	$\begin{cases}x-2y+z+2=0\\x^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36\end{cases}$

2.2.16.	$\begin{cases} 3x-3y-z+5=0 \\ (x+2)^2+y^2+(z+3)^2=81 \end{cases}$	2.2.32.	$\begin{cases} 2x-5y+z=0 \\ (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=100 \end{cases}$

Покажемо розв'язання завдання 2.2 для кола $\begin{cases} 3x+y-z-9=0 \\ (x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36 \end{cases}$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку радіус кола. Зробимо рисунок (рис. 2.15).

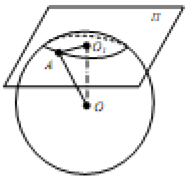


Рис. 2.15

Нехай $OA = R$ – радіус сфери, дорівнює 6.

OO_1 теж можна знайти як відстань від точки O до площини Π:

$$\rho(O,\Pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$

$$=\frac{|3\cdot 4+1\cdot 7-1\cdot(-1)-9|}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{11}.$$

Тобто $OO_1=\sqrt{11}$.

Тепер за теоремою Піфагора маємо: $r=O_1A=\sqrt{OA^2-OO_1^2}=\sqrt{6^2-(\sqrt{11})^2}=5$.

Центр кола знайдемо як точку перетину площини Π і прямої, яка перпендикулярна до Π, і проходить через точку O.

Рівняння цієї прямої має вигляд: $\frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

Розв'язавши систему $\begin{cases} \frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+1}{-1}, \\ 3x+y-z-9=0 \end{cases}$ маємо координати центра кола *O_1 (1, 6, 0)*.

Відповідь: радіус кола $r=5$, центр кола *O_1 (1, 6, 0)*.

РІВЕНЬ В

Завдання 2.3. *Дослідити методом перерізів поверхню другого порядку, задану в прямокутній декартовій системі координат рівнянням (див. таблиця 2.3):*

Таблиця 2.3

№	*Задана поверхня другого порядку*
2.3.1.	$3x^2+y^2-2z^2=0$
2.3.2.	$9x^2+8y^2+24z^2-72=0$
2.3.3.	$2x^2-5y^2-10=0$
2.3.4.	$4x^2+9y^2-36z^2-144=0$
2.3.5.	$x^2+2y^2-4z=0$
2.3.6.	$x^2-4y^2-4z=0$

2.3.7.	$x^2-2y^2-4x-z+1=0$
2.3.8.	$4x^2+y^2-16z=0$
2.3.9.	$x^2+2y^2+z^2+4x-8=0$
2.3.10.	$2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0$
2.3.11.	$x^2+y^2+z^2-4z+5=0$
2.3.12.	$2x^2-y^2+2z^2-8x+6y-12z-10=0$
2.3.13.	$x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$
2.3.14.	$x^2+y^2+z^2-6x+10=0$
2.3.15.	$2x^2+y^2-3z^2+4x-4y=0$
2.3.16.	$2x^2+z^2+2x+z=0$
2.3.17.	$2x^2-y^2+2z+1=0$
2.3.18.	$2x^2+y^2+2z+1=0$
2.3.19.	$2x^2+y^2-3z^2+6z=0$
2.3.20.	$2x^2+y^2-3z^2-4x+4y+6=0$
2.3.21.	$4x^2-y^2+2z^2-2y=0$
2.3.22.	$x^2-8y^2+6z^2-4x-1=0$
2.3.23.	$2x^2-5y^2+6x-20=0$
2.3.24.	$4x^2+y^2-6z^2-8z+121=0$
2.3.25.	$x^2-8y^2+4z=0$
2.3.26.	$4x^2+4y^2-12z+3=0$
2.3.27.	$x^2+2y^2-4y+z-4=0$
2.3.28.	$3x^2-2y^2+5z^2+6z=0$
2.3.29.	$x^2+2y^2+9z^2-4x+4y+2=0$
2.3.30.	$6x^2-3y^2+2z^2-2y=0$
2.3.31.	$2x^2+6y^2-4z^2-4x+9=0$
2.3.32.	$x^2-3y^2+6x+y=0$

Покажемо розв'язання завдання 2.3 для поверхні другого порядку

$$2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0.$$

Розв'язання.

Будемо перетинати нашу поверхню другого порядку площинами, паралельними до координатних:

1) $x=h$:

$$2h^2-3y^2-2z^2-8h+6y-12z-21=0,$$

після спрощення отримаємо $3(y-1)^2+2(z+3)^2=2h^2-8h$.

Якщо $h\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, то в перерізах будуть еліпси; якщо $h=0$ або $h=4$ маємо в перерізі дві точки *(0, 1, -3)* і *(4, 1, -3);* при $h\in(0;4)$ поверхні не існує.

2) $y=h$:

$$2x^2-3h^2-2z^2-8x+6h-12z-21=0,$$

після спрощення отримаємо $2(x-2)^2 - 2(z+3)^2 = 3h^2 - 6h + 11$.

Оскільки $3h^2 - 6h + 11 > 0$, то в перерізах для $h \in R$ завжди будуть гіперболи.

3) $z = h$:

$$2x^2 - 3y^2 - 2h^2 - 8x + 6y - 12h - 21 = 0,$$

після спрощення отримаємо $2(x-2)^2 - 3(y-1)^2 = 2h^2 + 12h + 26$.

Оскільки $2h^2 + 12h + 26 > 0$, то в перерізах для $h \in R$ завжди будуть гіперболи.

Отже, даною поверхнею є двопорожнинний гіперболоїд.

Відповідь: це двопорожнинний гіперболоїд.

Завдання 2.4. *Дано алгебраїчне рівняння (див. таблиця 2.4).*

А) Визначте, яку поверхню другого порядку воно описує;

Б) Що являє собою центр поверхні?

В) Запишіть рівняння дотичної площини до поверхні в заданій точці;

Г) Скласти рівняння діаметральної площини поверхні, спряженої із заданим вектором.

Таблиця 2.4

№	*Рівняння поверхні*	*Точка*	*Вектор*
2.4.1.	$x^2 + y^2 = z^2$	$A\,(10, -1, 2)$	$\vec{u}\,(3, -5, 1)$
2.4.2.	$y^2 + z^2 - \frac{z^2}{4} = 0$	$S\,(0, 0, -1)$	$\vec{u}\,(-2, 0, -4)$
2.4.3.	$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{1} = 1$	$M\,(-2, -7, 1)$	$\vec{u}\,(7, 4, 0)$
2.4.4.	$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0$	$A\,(0, 5, -5)$	$\vec{u}\,(0, 9, -2)$
2.4.5.	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$	$D\,(3, -4, 5)$	$\vec{u}\,(0, -6, 0)$
2.4.6.	$z = x^2 + y^2$	$E\,(-8, 0, 0)$	$\vec{u}\,(1, 2, -5)$
2.4.7.	$\frac{x^2 + z^2}{6} - \frac{y^2}{5} + 1 = 0$	$S\,(7, 10, -4)$	$\vec{u}\,(0, -2, 7)$
2.4.8.	$8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0$	$M\,(-2, 5, 0)$	$\vec{u}\,(3, 0, -8)$
2.4.9.	$4z = x^2 - y^2$	$A\,(1, 3, -2)$	$\vec{u}\,(0, 1, 0)$
2.4.10.	$8x - y^2 - 2z^2 = 0$	$D\,(-3, 1, 0)$	$\vec{u}\,(1, -9, 0)$
2.4.11.	$z^2 - 4x = 0$	$E\,(-8, 1, 0)$	$\vec{u}\,(-5, 3, 1)$
2.4.12.	$x^2 + 4y^2 - 8 = 0$	$S\,(-2, 10, -1)$	$\vec{u}\,(1, -6, 8)$
2.4.13.	$3x^2 + 5y^2 = 12z$	$M\,(4, -2, 7)$	$\vec{u}\,(-2, 0, 11)$
2.4.14.	$2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$	$A\,(-5, 0, 1)$	$\vec{u}\,(0, -11, 3)$
2.4.15.	$2y^2 + z^2 = 1 - x$	$D\,(2, 9, -1)$	$\vec{u}\,(7, 6, -3)$
2.4.16.	$3x^2 - y^2 - z^2 = 3$	$E\,(-1, 4, 3)$	$\vec{u}\,(-2, 5, 7)$
2.4.17.	$z^2 + 4z - 2x + 6 = 0$	$S\,(-6, 0, 9)$	$\vec{u}\,(1, -1, 4)$

2.4.18.	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=2z$	$M\left(2,-7,6\right)$	$\vec{u}\left(0,-2,7\right)$
2.4.19.	$x=9y^2$	$A\left(0,6,-2\right)$	$\vec{u}\left(-5,7,1\right)$
2.4.20.	$y^2+2y-4x+1=0$	$D\left(0,-3,8\right)$	$\vec{u}\left(1,0,-9\right)$
2.4.21.	$\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{2}=0$	$E\left(7,-2,-2\right)$	$\vec{u}\left(2,-3,6\right)$
2.4.22.	$2x^2+z^2=1-y$	$S\left(-2,0,3\right)$	$\vec{u}\left(3,0,4\right)$
2.4.23.	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$	$M\left(3,0,-1\right)$	$\vec{u}\left(0,-7,2\right)$
2.4.24.	$x=2z^2$	$A\left(0,-4,-7\right)$	$\vec{u}\left(2,-5,1\right)8$
2.4.25.	$4x^2-y^2-2z^2=0$	$D\left(-4,5,-9\right)$	$\vec{u}\left(1,-5,0\right)$
2.4.26.	$\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$	$E\left(8,-3,6\right)$	$\vec{u}\left(1,-2,4\right)$
2.4.27.	$\frac{y^2+z^2}{4}-\frac{x^2}{3}=-1$	$S\left(0,0,-1\right)$	$\vec{u}\left(6,2,-3\right)$
2.4.28.	$\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{7}=1$	$M\left(-2,-7,1\right)$	$\vec{u}\left(11,-1,1\right)$
2.4.29.	$z=1-x^2-y^2$	$A\left(0,5,-5\right)$	$\vec{u}\left(4,-7,1\right)$
2.4.30.	$x^2+y^2+z=0$	$D\left(3,-4,5\right)$	$\vec{u}\left(8,-5,10\right)$
2.4.31.	$x^2-y^2+x-7y+5z+6=0$	$E\left(-8,0,0\right)$	$\vec{u}\left(4,0,-5\right)$
2.4.32.	$x^2+6y^2-z^2+3y-z=0$	$S\left(7,10,-4\right)$	$\vec{u}\left(2,-2,7\right)$

Покажемо розв'язання завдання 2.4 для рівняння поверхні $4x^2+y^2-8z=0$, точки $B\left(-1,2,-2\right)$ і вектора $\vec{a}\left(0,-3,2\right)$.

Розв'язання.

А) Дане алгебраїчне рівняння $4x^2+y^2-8z=0$ описує поверхню другого порядку, а саме: $4x^2+y^2=8z$, або $x^2+\frac{y^2}{4}=2z$ – це еліптичний параболоїд.

Б) Щоб знайти центр поверхні, скористаємось формулою:

$$\begin{cases} F'_x\left(x,y,z\right)=0 \\ F'_y\left(x,y,z\right)=0. \\ F'_z\left(x,y,z\right)=0 \end{cases}$$

З вихідного рівняння маємо $F\left(x,y,z\right)=4x^2+y^2-8z$, тому

$$\begin{cases} F'_x\left(x,y,z\right)=4\cdot 2x=8x=0 \\ F'_y\left(x,y,z\right)=2y=0 \\ F'_z\left(x,y,z\right)=-8=0 \end{cases}.$$

Ми не можемо розв'язати систему, отже, еліптичний параболоїд не має центра (це нецентральна поверхня).

В) Щоб записати рівняння дотичної площини до поверхні в точці $B\left(-1,2,-2\right)$, скористаємось формулою:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Частинні похідні в загальному вигляді вже шукали, тепер підставимо координати точки:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)=8x_0=8\cdot(-1)=-8,$$
$$F'_y(x_0,y_0,z_0)=2y_0=2\cdot 2=4,$$
$$F'_z(x_0,y_0,z_0)=-8.$$

Тепер підставимо в рівняння дотичної площини:

$-8\cdot(x-(-1))+4\cdot(y-2)-8\cdot(z-(-2))=0$, або після розкриття дужок маємо $2x-y+2z+8=0$.

Г) Щоб записати рівняння діаметральної площини, спряженої з вектором $\bar{s}$, скористаємось формулою:

$$F'_x(x,y,z)\cdot a+F'_y(x,y,z)\cdot b+F'_z(x,y,z)\cdot c=0.$$

З попереднього пункту маємо $F'_x(x,y,z)=4\cdot 2x=8x$, $F'_y(x,y,z)=2y$, $F'_z(x,y,z)=-8$.

Підставимо в рівняння: $8x\cdot 0+2y\cdot(-3)-8\cdot 2=0$, або після спрощення $3y+8=0$.

Відповідь: А) еліптичний параболоїд; Б) нецентральна поверхня; В) $2x-y+2z+8=0$; Г) $3y+8=0$.

Завдання 2.5. *Використовуючи задане рівняння кривої як напрямної (див. таблиця 2.5), скласти:*

а) рівняння конічної поверхні з вершиною в заданій точці;

б) рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні до заданої прямої.

Таблиця 2.5

№	*Рівняння кривої*	*Задана точка*	*Задана пряма*
2.5.1.	$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=-1\\ y=0\end{cases}$	$M(-2,5,0)$	$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{4}$
2.5.2.	$\begin{cases}x^2+2xy+3y^2-x=0\\ z=0\end{cases}$	$A(1,3,-2)$	$\begin{cases}x=t-2\\ y=5t\\ z=8t+1\end{cases}$
2.5.3.	$\begin{cases}(x-1)^2+z^2=4\\ y=0\end{cases}$	$D(-3,1,0)$	$\begin{cases}2x-4y=0\\ x-y+z-2=0\end{cases}$
2.5.4.	$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ z=0\end{cases}$	$E(-8,1,0)$	$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{3}$
2.5.5.	$\begin{cases}x=y^2+z^2\\ x=2z\end{cases}$	$S(-2,10,-1)$	$\begin{cases}x=2t+9\\ y=t-3\\ z=-t+1\end{cases}$
2.5.6.	$\begin{cases}x^2+y^2=16\\ z=0\end{cases}$	$M(4,-2,7)$	$\begin{cases}3x-y+2z-4=0\\ 2x+y-5=0\end{cases}$
2.5.7.	$\begin{cases}4x^2-y^2+3z=0\\ 2x-y+5z=1\end{cases}$	$A(-5,0,1)$	$\frac{x}{1}=\frac{y-9}{-3}=\frac{z+2}{6}$
2.5.8.	$\begin{cases}x^2+6xz-4z^2+3x=0\\ y=0\end{cases}$	$D(2,9,-1)$	$\begin{cases}x=-2t\\ y=4t-5\\ z=3t-10\end{cases}$
2.5.9.	$\begin{cases}(x-4)^2+(y+1)^2=9\\ z=0\end{cases}$	$E(-1,4,3)$	$\begin{cases}-x+3y-z-4=0\\ 5x-y+3z-8=0\end{cases}$
2.5.10.	$\begin{cases}\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{24}=1\\ z=0\end{cases}$	$S(-6,0,9)$	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{9}=\frac{z}{0}$
2.5.11.	$\begin{cases}x^2-4xz+6z^2+x=0\\ y=0\end{cases}$	$M(2,-7,6)$	$\begin{cases}x=-t\\ y=12\\ z=5t-7\end{cases}$
2.5.12.	$\begin{cases}(x+2)^2+y^2=6\\ z=0\end{cases}$	$A(0,6,-2)$	$\begin{cases}x-2y-z+10=0\\ 4x+z-1=0\end{cases}$
2.5.13.	$\begin{cases}5y^2+2z^2=20\\ x=0\end{cases}$	$D(0,-3,8)$	$\frac{x-11}{3}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-9}{4}$
2.5.14.	$\begin{cases}3y^2-z^2+5x=0\\ x+y-2z=0\end{cases}$	$E(7,-2,-2)$	$\begin{cases}x=10\\ y=-4t+1\\ z=3t-9\end{cases}$
2.5.15.	$\begin{cases}x^2+6z^2+4x=0\\ 2x-y+3z=1\end{cases}$	$S(-2,0,3)$	$\begin{cases}x-y-z+3=0\\ 5x-y+2z-4=0\end{cases}$
2.5.16.	$\begin{cases}\frac{\delta^2}{4}-\frac{\delta^2}{9}+\frac{z^2}{2}=1\\ 2\delta-3z+1=0\end{cases}$	$M(3,0,-1)$	$\frac{x+5}{-5}=\frac{y-8}{3}=\frac{z+1}{2}$
2.5.17.	$\begin{cases}x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16\\ x=5\end{cases}$	$A(0,-4,-7)$	$\begin{cases}x=6t+1\\ y=-2t+5\\ z=-3t\end{cases}$
2.5.18.	$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1\\ 3x+y-z-1=0\end{cases}$	$D(-4,5,-9)$	$\begin{cases}-x+3y+z-2=0\\ 3x+y-2z+3=0\end{cases}$
2.5.19.	$\begin{cases}\frac{x^2}{5}+y^2+\frac{z^2}{2}=1\\ 2x-y+4z=0\end{cases}$	$E(8,-3,6)$	$\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+9}{7}$

2.5.20.	$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=21\\ x-z=4\end{cases}$	$S\,(0,0,-1)$	$\begin{cases}x=6t+3\\ y=-t+1\\ z=7t-2\end{cases}$
2.5.21.	$\begin{cases}\frac{\delta^2}{16}-\frac{\delta^2}{7}+z^2=1\\ 4y+3z+12=0\end{cases}$	$M\,(-2,-7,1)$	$\begin{cases}x-3=0\\ 2x-3y+4z-2=0\end{cases}$
2.5.22.	$\begin{cases}2x^2+z^2-y+1=0\\ y-z+1=0\end{cases}$	$A\,(0,5,-5)$	$\frac{x+20}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+7}{-9}$
2.5.23.	$\begin{cases}4x^2+3z^2=9\\ y=0\end{cases}$	$D\,(3,-4,5)$	$\begin{cases}x=2t+3\\ y=-5t\\ z=t-10\end{cases}$
2.5.24.	$\begin{cases}y^2+(z-3)^2=2\\ x=0\end{cases}$	$E\,(-8,0,0)$	$\begin{cases}x-4y-z-6=0\\ 2x-y+z-2=0\end{cases}$
2.5.25.	$\begin{cases}\frac{\delta^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1\\ \delta=0\end{cases}$	$S\,(7,10,-4)$	$\frac{x}{4}=\frac{y+9}{-1}=\frac{z-2}{3}$
2.5.26.	$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1\\ x+y=0\end{cases}$	$M\,(0,-7,0)$	$\begin{cases}x=4t-2\\ y=2t\\ z=-3t+7\end{cases}$
2.5.27.	$\begin{cases}2y^2-yz+z^2-3z=0\\ x=0\end{cases}$	$A\,(-2,1,2)$	$\begin{cases}x+y+z-4=0\\ x-y+z-3=0\end{cases}$
2.5.28.	$\begin{cases}\frac{z^2}{10}-\frac{y^2}{7}=-1\\ x=0\end{cases}$	$D\,(-7,-2,11)$	$\frac{x-4}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-9}{-4}$
2.5.29.	$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=2z\\ x^2+y^2+z^2=10z\end{cases}$	$E\,(8,3,-2)$	$\begin{cases}x=-3t\\ y=t+4\\ z=-2t+7\end{cases}$
2.5.30.	$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+z^2=1\\ 2x-y+4z-2=0\end{cases}$	$S\,(0,-8,9)$	$\begin{cases}x-2y+4=0\\ 2x-y+5z-37=0\end{cases}$
2.5.31.	$\begin{cases}x^2+y^2+(z-5)^2=9\\ z=4\end{cases}$	$M\,(-1,0,-3)$	$\frac{x+5}{-7}=\frac{y}{0}=\frac{z}{4}$
2.5.32.	$\begin{cases}3x^2+6y^2-z=0\\ x+y+z=1\end{cases}$	$A\,(10,-1,2)$	$\begin{cases}x=5t+7\\ y=t-2\\ z=10\end{cases}$

Покажемо розв'язання завдання 2.5 для лінії $\begin{cases}(\delta-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25\\ x+\delta-z+2=0\end{cases}$,

точки $M\,(0,5,0)$ і прямої $\begin{cases}x=y\\ z=4\end{cases}$.

Розв'язання.

А) Знайдемо рівняння шуканої конічної поверхні.

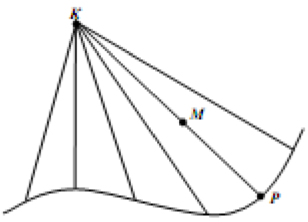


Рис. 2.16

Зробимо рисунок (рис. 2.16).

Нехай *M (X, Y, Z)* – біжуча точка шуканої конічної поверхні, *P (x, y, z)* – її проекція на напрямну конуса, а $\bar{p}\,(m,n,1)$ – вектор, якому колінеарні вектори $\overline{KM}$ і $\overline{KP}$.

З колінеарності векторів випливає пропорційність їх координат, тому маємо наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases}\frac{X-0}{m}=\frac{Y-5}{n}=\frac{Z-0}{1}\\ \frac{x-0}{m}=\frac{y-5}{n}=\frac{z-0}{1}\end{cases}$$

Виразимо з другого рівняння x і y через z і підставимо все в рівняння напрямної:

$$x=mz \ \text{ і } \ y=nz+5,$$

$$\begin{cases}(mz-1)^2+(nz+3)^2+(z-2)^2=25\\ mz+nz+5-z+2=0\end{cases}.$$

Виразимо з другого рівняння z через m і n: $z=-\frac{7}{m+n-1}$ і підставимо в перше рівняння:

$$\left(-\frac{7m}{m+n-1}-1\right)^2+\left(-\frac{7n}{m+n-1}+3\right)^2+\left(-\frac{7}{m+n-1}-2\right)^2=25.$$

Після спрощення маємо $52m^2-4n^2-50mn+36m+92n+10=0$.

Тепер використавши підстановку $m=\frac{X}{Z}$ і $n=\frac{Y-5}{Z}$, остаточно отримаємо рівняння конічної поверхні: $52X^2-4(Y-5)^2+(92Z-50X)(Y-5)+36XZ+10Z^2=0$.

Б) Знайдемо рівняння шуканої циліндричної поверхні.

Зробимо рисунок (рис. 2.17). Нехай *M (X, Y, Z)* – біжуча точка шуканої циліндричної поверхні, *P (x, y, z)* – її проекція на напрямну циліндра, а $\bar{p}$ – напрямний вектор твірних.

Знайдемо спочатку координати вектора $\vec{p}$, якщо відомо, що твірні паралельні до прямої $\begin{cases} x = y \\ z = 4 \end{cases}$.

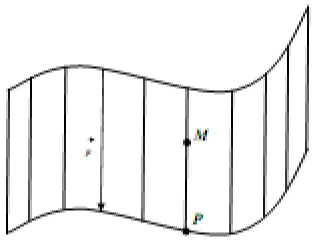


Рис. 2.17

Треба обчислити наступний детермінант $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\vec{i} - 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$. Тобто, за кординати вектора $\vec{p}$ можна взяти або *(-1, -1, 0)*, або *(1, 1, 0)*.

З колінеарності векторів $\vec{p}$ і $\overline{PM}$ випливає пропорційність їх координат, тому маємо співвідношення:

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{1} = \frac{Z - z}{0}, \text{ тобто}$$

$$\begin{cases} X = x + t \\ Y = y + t \\ Z = z \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} x = X - t \\ y = Y - t \\ z = Z \end{cases}.$$

Врахувавши умову $\begin{cases} (\delta - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25 \\ x + \delta - z + 2 = 0 \end{cases}$, маємо $\begin{cases} (X - t - 1)^2 + (Y - t + 3)^2 + (Z - 2)^2 = 25 \\ X - t + Y - t - Z + 2 = 0 \end{cases}$. З другого рівняння системи маємо $t = \dfrac{X + Y - Z + 2}{2}$, підставимо в перше рівняння: $\left(X - \dfrac{X + Y - Z + 2}{2} - 1\right)^2 + \left(Y - \dfrac{X + Y - Z + 2}{2} + 3\right)^2 + (Z - 2)^2 = 25$ і маємо, після спрощення, рівняння циліндричної поверхні: $(X - Y + Z - 4)^2 + (Y + Z - X + 4)^2 + 4(Z - 2)^2 = 100$.

Відповідь: А) $52X^2 - 4(Y - 5)^2 + (92Z - 50X)(Y - 5) + 36XZ + 10Z^2 = 0$;

Б) $(X - Y + Z - 4)^2 + (Y + Z - X + 4)^2 + 4(Z - 2)^2 = 100$.

Завдання 2.6. *Скласти рівняння тих прямолінійних твірних заданої лінійчастої поверхні, які паралельні до заданої площини.*

Таблиця 2.6

№	*Рівняння поверхні*	*Рівняння площини*
2.6.1.	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$	$2x - y - 2z - 10 = 0$
2.6.2.	$z = 4x^2 - y^2$	$2x + 3y - z - 7 = 0$

2.6.3.	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$	$x-y+5z=0$
2.6.4.	$z^2-9y^2=16x=0$	$3x+y-z+2=0$
2.6.5.	$x^2+\frac{\delta^2}{81}-\frac{z^2}{4}=1$	$3x-y-3z-4=0$
2.6.6.	$\frac{y^2}{25}-x^2=2z$	$5x+2y-z-3=0$
2.6.7.	$\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{25}=1$	$2x-y+4z=0$
2.6.8.	$\frac{x^2}{9}-z^2=12y$	$6x+3y-z+2=0$
2.6.9.	$\frac{\delta^2}{25}-\frac{\delta^2}{4}+z^2=1$	$9x-2y-z-1=0$
2.6.10.	$\frac{x^2}{4}-9y^2-6z=0$	$2x+y-5z-8=0$
2.6.11.	$x^2+\frac{\delta^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$	$3x-2y+9z=0$
2.6.12.	$25x^2-4z^2=y$	$x+3y-z+22=0$
2.6.13.	$x^2-y^2+\frac{z^2}{25}=1$	$4x-y-3z+5=0$
2.6.14.	$\frac{x^2}{81}-y^2-4z=0$	$4x+y-z-11=0$
2.6.15.	$9x^2+4y^2-z^2=1$	$2x-y+z=0$
2.6.16.	$9y^2-z^2-2x=0$	$6x+7y-z+1=0$
2.6.17.	$36x^2-y^2+25z^2=1$	$3x-2y-4z-8=0$
2.6.18.	$\frac{x^2}{25}-z^2=12y$	$x+9y-z-13=0$
2.6.19.	$\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$	$x-3y+z=0$
2.6.20.	$25x^2-4z^2=10y$	$4x+8y-z+11=0$
2.6.21.	$\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$	$x-4y-z-14=0$
2.6.22.	$x^2-z^2=y$	$12x+3y-6z-7=0$
2.6.23.	$x^2-81y^2+9z^2=1$	$2x-6y+9z=0$
2.6.24.	$8x^2-2z^2=3y$	$3x+4z+2=0$
2.6.25.	$x^2-\frac{\delta^2}{4}+\frac{z^2}{64}=1$	$3y-2z-9=0$
2.6.26.	$4y^2-25z^2+10x=0$	$7x+5y-2z-1=0$
2.6.27.	$\frac{\delta^2}{25}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$	$2x-y+7z=0$
2.6.28.	$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{81}=2y$	$3x+4y-2z+15=0$

2.6.29.	$x^2 - 36y^2 + 81z^2 = 1$	$3x + 8y - 10 = 0$
2.6.30.	$y^2 - 16z^2 + 8x = 0$	$2x + 9y - z - 4 = 0$
2.6.31.	$x^2 + 9y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$	$6x - y + 3z = 0$
2.6.32.	$9y^2 - 16z^2 = 16y$	$x + 3y - 2z + 18 = 0$

Покажемо розв'язання завдання 2.6 для поверхні $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ і площини $4x - 5y - 10z - 20 = 0$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння сімейств прямолінійних твірних для заданого однопорожнинного гіперболоїда.

$$\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{16},$$

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{z}{2}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{z}{2}\right) = \left(1 - \frac{y}{4}\right)\left(1 + \frac{y}{4}\right), \text{ тому маємо}$$

$$d_1: \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = k\left(1 - \frac{y}{4}\right) \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{y}{4}\right) \end{cases} \quad \text{і} \quad d_2: \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = m\left(1 + \frac{y}{4}\right) \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{y}{4}\right) \end{cases}.$$

Для того, щоб пряма була паралельна до площини, необхідно, щоб скалярний добуток напрямного вектора прямої і вектора нормалі до площини дорівнював би нулеві.

Знайдемо координати векторів $\vec{n}$, $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$.

Координати вектора $\vec{n}$ візьмемо з рівняння площини: $\vec{n}(4,-5,-10)$. Для того, щоб знайти координати вектора $\vec{d_1}$, треба обчислити наступний «детермінант»:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{5} & \frac{k}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4k} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{k^2-1}{8k}\cdot\vec{i} - \frac{1}{5}\cdot\vec{j} - \frac{k^2+1}{20k}\cdot\vec{k}.$$

З умови, що $(\vec{d_1},\vec{n}) = 0$, тобто $\frac{k^2-1}{8k}\cdot 4 - \frac{1}{5}\cdot(-5) - \frac{k^2+1}{20k}\cdot(-10) = k + 1 = 0$. Звідки $k = -1$.

Аналогічно знайдемо m:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{5} & -\frac{m}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4m} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1-m^2}{8m}\cdot\vec{i} - \frac{1}{5}\cdot\vec{j} + \frac{1+m^2}{20k}\cdot\vec{k}.$$

З умови, що $(\vec{d_2},\vec{n}) = 0$, тобто $\frac{1-m^2}{8m}\cdot 4 - \frac{1}{5}\cdot(-5) + \frac{1+m^2}{20m}\cdot(-10) = 1 - m = 0$. Звідки $m = 1$.

Отже, маємо наступні прямолінійні твірні, паралельні до заданої площини:

$$d_1: \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = \frac{y}{4} - 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = -\frac{y}{4} - 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad d_2: \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{4} \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{2} = 1 - \frac{y}{4} \end{cases}, \text{ або}$$

$$d_1: \begin{cases} 4x - 5y - 10z + 20 = 0 \\ 4x + 5y + 10z + 20 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad d_2: \begin{cases} 4x - 5y - 10z - 20 = 0 \\ 4x + 5y + 10z - 20 = 0 \end{cases}.$$

Відповідь: $\begin{cases} 4x - 5y - 10z + 20 = 0 \\ 4x + 5y + 10z + 20 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 4x - 5y - 10z - 20 = 0 \\ 4x + 5y + 10z - 20 = 0 \end{cases}.$